О строении трехмерных поверхностей с метрикой вращения

Борисенко А.А.[1], *проф.*; Татарко Е.В.[2], *студ.*
[1] Сумский государственный университет, г. Суми
[2] Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, г. Харьков

Многомерная риманова метрика называется метрикой вращения, если она имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)((du^2)^2 + \ldots + (du^l)^2)$. При этом поверхность, несущая метрику вращения, не обязательно является поверхностью вращения. Тогда возникает вопрос о том, какие условия нужны для того, чтобы подмногообразия с метрикой вращения были многомерными поверхностями вращения.

Рассмотрим двумерное внутренне плоское подмногообразие F^2 в единичной сфере S^3 с радиус вектором $\rho(u^2, u^3) = (g_1(u^2, u^3); g_2(u^2, u^3); g_3(u^2, u^3); g_4(u^2, u^3); 0)$. Пусть в плоскости x^1Ox^5 задана регулярная кривая $(f(u^1); 0; 0; 0; h(u^1))$. Тогда подмногообразие, полученное вращением указанной кривой, называется *подмногообразием вращения,* и его индуцированная метрика является римановой метрикой вращения. Оно задается радиус-вектором $r(u^1, u^2, u^3) = (f(u^1)g_1(u^2, u^3); f(u^1)g_2(u^2, u^3); f(u^1)g_3(u^2, u^3); f(u^1)g_4(u^2, u^3); h(u^1))$.

Кривая $\gamma(t)$ подмногообразия F^3 в евклидовом пространстве E^5 называется *линией кривизны* подмногообразия F^3, если для любой нормали ξ из нормального пространства $N_{\gamma(t)}F^3$ касательный вектор $\dot{\gamma}(t)$ кривой$\dot{\gamma}(t)$ является главным направлением относительно нормали ξ.

Известно, что первая размерность евклидового пространства, в котором существуют трехмерные подмногообразия с метрикой отрицательной секционной кривизны, равна 5. Доказан следующий результат.

Теорема. Пусть C^3-гладкое подмногообразие F^3 в евклидовом пространстве E^5 с индуцированной римановой метрикой вращения $ds^2 = (du^1)^2 + \varphi^2(u^1)((du^2)^2 + (du^3)^2)$ отрицательной секционной кривизны. Если координатные линии u^1 являются линиями кривизны подмногообразия F^3, то F^3 является подмногообразием вращения.

Выражаем благодарность Драчу К.Д. за обсуждение результатов.